Calcul de primitives

Primitive d'une fonction continue

Définition: *Soit f une fonction définie sur D, et I un intervalle inclus dans D. On dit qu'une fonction F est une primitive de*

1. F est définie, continue et dérivable sur I ;

2. pour tout x ∊ I, F'(x) = f(x).

Si f admet une primitive F sur I, alors il est clair que pour tout
C ∊ IR, la fonction G : x ⟶F(x) + C est aussi une primitive de f sur I. En fait il n'y en a pas d'autre : si F est une prim
toutes les primitives de f sur I s'écrivent x ⟶ F(x) + C pour un certain C ∈ IR, puisque (F − G)'(x) = 0 pour tout x ∊
Voilà maintenant le résultat sur lequel repose le calcul intégral des fonctions continues :

> **Proposition** *Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, alors la fonction F définie par*
>
> $$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$
>
> *est une primitive de f sur $[a, b]$. C'est la seule qui s'annule en a.*

On utilise d'ailleurs les notations $\int f(x)dx$ ou $\int^x f(t)dt$ (**Attention :** pas $\int^x f(x)dx$) pour désigner l'ensemble des primitives de la fonction f. De ce théorème découle le résultat bien connu suivant

Proposition *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On a*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.

Voici une liste de primitives qu'il faut absolument connaitre. Le lecteur devra à chaque fois s'interroger sur l'intervalle o`u ces primitives existent. On donne toutes les primitives de la fonction : le C des formules ci-dessous désigne un nombre réel quelconque.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ pour } n \neq -1$	$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln\|x+a\| + C$
$\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C, \text{ pour } \alpha \neq 0$	$\int \cos(ax)dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C, \text{ pour } a \neq 0$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

Intégration par parties

Il arrive que l'on ait à intégrer un produit de fonctions. Bien entendu, le produit des primitives n'est pas une primitive du produit. Plus précisément, pour deux fonctions u et v dérivables, on a :

(u.v)'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)

On en déduit la formule d'intégration par parties :

Proposition *Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. On a*

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Cette formule est évidement très utile lorsque l'une des deux intégrales est beaucoup plus simple à calculer que l'autre. Soit par exemple :

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx$$

On pose u(x) = x et v'(x) = cos x. On a alors u'(x) = 1 et l'on peut prendre v(x) = sin x (un autre choix de primitive est tout à fait possible mais ne change pas le résultat du calcul). On obtient donc :

$$I = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$



Intégration par Changement de variable

La proposition qui suit est connue sous le nom de formule du changement de variable. Le lecteur doit noter que l'égalité ci-dessous peut être lue dans les deux sens, et qu'elle sert autant dans l'un que dans l'autre.

> **Proposition** *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Soit aussi u une fonction continument dérivable de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$ avec $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$. On a*
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$$

__Preuve:__ Si F est une primitive de f sur [a, b], on a, pour tout t de [α, β],
$(F \circ u)'(t) = F'(u(t)).u'(t) = f(u(t)).u'(t)$, et il suffit d'intégrer :

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt = [F \circ u(t)]_\alpha^\beta = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

ce qui prouve la proposition.

Avec les notations différentielles que l'on a déjà rencontrée, si $x = u(t)$, on peut écrire $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} = u'(t)$, ou, en poussant un peu le bouchon (hum),

$$du = u'(t)dt.$$

On peut donner un sens mathématique à ce petit calcul, mais pour l'instant on doit se contenter d'y voir un moyen de retenir cette formule, voir de la mettre en pratique. En effet, si l'on note u la variable notée x dans la formule ci-dessus (ce qui ne change rien), on lit :

$$\int_a^b f(u)du = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt.$$

Voici des exemples ou l'on applique la formule du changement de variable dans chacun des deux sens.

- On veut d'abord calculer

$$I = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$$

On va simplifier grandement le calcul en posant $u(t) = \sin t$. On a $du = u'(t)dt = \cos t dt$ et $u(\alpha) = 0$ pour $\alpha = 0$, $u(\beta) = 1$ pour $\beta = \frac{\pi}{2}$. La formule ci-dessus lue de gauche à droite donne alors

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt.$$

Or sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, $\sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t$, donc

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

On vient de calculer la surface d'un quart de disque de rayon 1, donné par l'équation $y^2 = 1 - x^2$, avec $x \in [0, 1]$. Pour un disque de rayon R, on trouve de cette manière la valeur de son aire : πR^2.

- Calculons maintenant l'intégrale

$$J = \int_1^e \frac{(\ln(t))^2}{t} dt$$

On reconnait facilement dans la fonction à intégrer une expression de la forme $f(u(t))u'(t)$ avec $u(t) = \ln t$ (et donc $u'(t) = 1/t$) et $f(x) = x^2$. On a $u(1) = 0$, $u(e) = 1$ et, en lisant la formule de changement de variable de droite à gauche,

$$J = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$$

Primitives de fraction rationnelles

Lorsque f est une fraction rationnelle, il existe un procédé dit de décomposition en éléments simples qui permet de trouver ses primitives. Rappelons d'abord que ces primitives n'existent que sur chaque intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f. On donne maintenant une idée de ce procédé pour les fractions rationnelles du type

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}.$$

Il faut distinguer trois cas :

- Cas 1 : le dénominateur admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2. Dans ce cas on peut écrire

$$f(x) = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2},$$

où A et B sont deux réels.

- Cas 2 : le dénominateur admet une racine double x_0. Dans ce cas il existe A et B dans $\mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{A}{(x - x_0)^2} + \frac{B}{x - x_0}$$

- Cas 3 : le dénominateur ne s'annule pas : on écrit

$$f(x) = A \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + B \frac{1}{(x + \frac{b}{2a})^2 - \Delta}.$$

Le lecteur se persuadera qu'il connait les primitives de chacun des termes qui apparaissent ci-dessus. La question qui reste et de savoir déterminer les coefficients A et B dans chacun des cas qui précèdent. La méthode la plus simple consiste à réduire les expressions ci-dessus au même dénominateur, et d'identifier les coefficients.